

**ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ И СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРАЛОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОМ
ОБОБЩЕННОГО СДВИГА. II.**

С.К.АБДУЛЛАЕВ, Н.Р.КАРАМАЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

В работе для достаточно широкого класса интегральных операторов типа свертки, порожденных обобщенным сдвигом (ОС), ассоциированным с дифференциальным оператором Лапласа – Бесселя, устанавливаются весовые L_p -оценки.

Рассмотренный класс операторов содержит, в частности, сингулярные интегральные операторы, потенциалы Рисса, интегралы Пуассона, порожденные ОС.

Введение

Настоящая работа является продолжением работы ([3]), в которой установлены двухвесовые оценки с монотонно возрастающими весами. Здесь рассматривается случай монотонно убывающих, а также произвольных весов из определенного достаточно широкого класса.

В идейном аспекте настоящая работа примыкает к работе [2]. Отметим, что многие обозначения и определения заимствованы из ([3]), и потому будем ими пользоваться без оговорок.

Оценки в терминах интегральных характеристик

Пусть R_m - евклидово пространство размерности m ($m \geq 2$),

$$R_m^+ = \{(x_1, \dots, x_m) : x_m > 0\}.$$

$$T^s : u \rightarrow T^s u(x) = C_\nu \int_0^x u(x' - s', \sqrt{x_m^2 - 2x_m s_m \cos \alpha + s_m^2}) \sin^{2\nu-1} \alpha d\alpha$$

оператор обобщенного сдвига, порожденный оператором Лапласа – Бес-

селя ([7]), $x = (x', x_m)$, $s = (s', s_m)$, $x', s' \in R_{m-1}$, $C_\nu = \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu)$,

$$L_{p,v} = \{u - \text{изм} : \|u\| = \left(\int_{R_m} |u(y)|^p y_m^{2v} dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \},$$

$K_v(p, q)$ ($v > 0, 1 < p \leq q < \infty$) - совокупность интегральных операторов вида

$$A : u \rightarrow (Au)(x) = \int_{R_m^+} K(s) T^s u(x) s_m^{2v} ds, \quad (\text{A})$$

ограниченно действующих из $L_{p,v}$ в $L_{q,v}$,

где

$$|K(s)| \leq C_k |s|^{-(m+2v-\alpha)}, \quad s \neq 0; \alpha = (m+2v) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right). \quad (\text{K})$$

При $p = q$ интеграл (A), вообще говоря, понимается в смысле главного значения (см.[4,5,8]).

1⁰) Всюду в дальнейшем, $1 < p \leq q < \infty, v > 0, \alpha > 0$ и они связаны соотношением (K), $(p)^{-1} + (p')^{-1} = 1$, а также $\beta = (m+2v-\alpha) =$

$$= (m+2v) \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right) \text{ (тогда } \beta p' > 1 \text{)}. \text{Постоянные } C, \text{ с различными индек-$$

сами, обозначают действительное число, зависящее от этих индексов, точное значение которого нам безразлично.

При $k = 1, 2, \dots, m$, $A_{p,v}^*(x_k)$ совокупность измеримых функций, суммируемых в p -й степени с весом x_m^{2v} на множестве $G_{k,\xi} = \{x \in R_m^+ : |x_k| \leq \xi\}$, при любом $\xi > 0$.

Для функции $u \in A_{p,v}^*(x_k)$ вводится характеристика

$$\Omega_{p,k}^*(u, \xi) = \left\{ \int_{G_{k,\xi}} |u(x)|^p x_m^{2v} dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \xi > 0.$$

$\Omega_{p,k}^*(u, \xi)$ неотрицательна, не убывает и неограничена, если $u \in A_{p,v}^*(x_k) / L_{p,v}(R_m^+)$.

Исследование интегральных операторов в терминах Ω характеристик берет начало с работ [1,2].

Для каждого k ($k = 1, 2, \dots, m$) R_m^+ разбивается в прямую сумму пространств $R_{m-1,k}, R_{1,k}$. Так что, если $y \in R_m^+$, то $y = \uparrow (\hat{y}_k, y_k)$, где $\hat{y}_k \in R_{m-1,k}, y_k \in R_{1,k}$,

$$R_{1,k} = \begin{cases} (-\infty, \infty), & k \neq m, \\ (0, +\infty), & k = m, \end{cases}$$

При этом будем пользоваться также обозначениями

$$u(y_1, \dots, y_m) = u(\hat{y}_k, y_k), \quad d\mu(y) = y_m^{2\nu} dy_1 \dots dy_m; \quad d\mu(y_i) = dy_i \quad i = \overline{1, m-1}; \\ d\mu(y_m) = y_m^{2\nu} dy_m, \quad d\mu(y) = d\mu(\hat{y}_k) d\mu(y_k).$$

$X_E(t)$ - характеристическая функция множества $E \subset (-\infty, +\infty)$.

Обозначим

$$u_{\xi,k}^*(y) = X_{[\xi, \infty)}(|y_k|) |u(y)|, \\ u_{\xi,k}^{0*}(y_k) = \left\{ \int_{R_{m-1,k}} (u_{\xi,k}^*(\hat{y}_k, y_k))^p d\mu(\hat{y}_k) \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \xi > 0.$$

Положим

$$i_{\beta,k}^*(u, \xi)(x) = \int_{R_m^+} \frac{u_{\xi,k}^*(y) d\mu(y)}{(|\hat{x}_k - \hat{y}_k| + |y_k| + \xi)^\beta}, \quad x \in R_m^+, \quad \xi > 0.$$

Введем множество

$$J_{p,\nu}^*(x_k) = \left\{ u \in A_{p,\nu}^*(x_k) : \int_1^\infty \Omega_{p,k}^*(u, t) t^{-\left(\frac{a_k+1}{q}+1\right)} dt < \infty \right\},$$

где $a_k = 2\nu$ если $k = m$, $a_k = 0$ если $k = \overline{1, (m-1)}$ и положим

$$b_k = 2\nu - a_k.$$

Лемма 1. Пусть $u \in A_{p,\nu}^*(x_k)$. Тогда

$$а) \quad \forall \xi > 0, \quad \forall x \in \{x \in R_m^+ : |x_k| \leq \xi\}$$

$$i_{\beta,k}^*(u, \xi)(x) \leq C x_m^{\frac{b_k}{p}} \int_0^\infty (|y_k| + \xi)^{\frac{m-1}{p} - \beta} u_{\xi,k}^{0*}(y_k) d\mu(y_k);$$

$$б) \quad \forall \xi > 0$$

$$\left(\int_{G_{k,\xi}} (i_{\beta,k}^*(u, \xi))^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \xi^{\frac{a_k+1}{q}} \int_{\{R_{1,k} : |y_k| \leq \xi\}} (|y_k| + \xi)^l u_{\xi,k}^{0*}(y_k) d\mu(y_k),$$

$$\text{где } l = -(a_k + 1) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right);$$

$$c) \left(\int_{\{R_{1,k}: |y_k| \leq t\}} (u_{\xi,k}^*(y_k))^p d\mu(y_k) \right)^{1/p} \leq c \Omega_{p,k}^*(u, t), \quad t > 0,$$

постоянная c не зависит от x, ξ и t .

Лемма 2. Если $u \in J_{p,\nu}^*(x_k)$, то

$$\int_{\{R_{1,k}: |y_k| \geq \xi\}} (|y_k| + \xi)^{-(a_k+1)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} u_{\xi,k}^* d\mu(y_k) \leq c \int_{\xi}^{\infty} t^{-\left(\frac{a_k+1}{q} + 1\right)} \Omega_{p,k}^*(u, t) dt, \quad \xi > 0.$$

Докажем лемму 1. Пусть $\xi > 0$ и $x \in \{R_m^+ : |x_k| \leq \xi\}$. Простыми вычислениями получаем

$$A^*(\hat{x}_k, y_k) = \left(\int_{R_{m-1,k}} \frac{d\mu(\hat{y}_k)}{(|\hat{x}_k - \hat{y}_k| + |y_k| + \xi)^{\beta p}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq c |x_m|^{\frac{b_k}{p}} (|y_k| + \xi)^{\frac{m-1}{p} - \beta}.$$

Применив теорему Фубини и затем неравенство Гельдера, с учетом последнего неравенства, получаем

$$\begin{aligned} i_{\beta,k}^*(u, \xi) &\leq \int_{R_{1,k}} A^*(\hat{x}_k, y_k) \left(\int_{R_{m-1,k}} (u_{\xi,k}^*(\hat{y}_k, y_k))^p d\mu(\hat{y}_k) \right)^{1/p} d\mu(y_k) \leq \\ &\leq c |x_m|^{\frac{b_k}{p}} \int_{R_{1,k}} (|y_k| + \xi)^{\frac{m-1}{p} - \beta} u_{\xi,k}^*(y_k) d\mu(y_k). \end{aligned}$$

Этим часть а) леммы 1 доказана.

Применением неравенства Юнга ([9]), получаем

$$\begin{aligned} \bar{A}^*(u_{\xi,k}^*; y_k) &\equiv \left(\int_{R_{m-1,k}} \left(\int_{R_{m-1,k}} \frac{u_{\xi,k}^*(\hat{y}_k, y_k) d\mu(\hat{y}_k)}{\left(|\hat{x}_k - \hat{y}_k| + |y_k| + \xi \right)^{\beta}} d\mu(\hat{x}_k) \right)^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq c (|y_k| + \xi)^{\frac{m-1+b_k}{r} - \beta} \left\{ \int_{R_{m-1,k}} [u_{\xi,k}^*(\hat{y}_k, y_k)]^p d\mu(\hat{y}_k) \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Применяя теорему Фубини и затем неравенство Минковского получаем

$$\left\{ \int_{\{R_m^+ : |x_k| \leq \xi\}} (i_{\beta,k}^*(u, \xi)(x))^q d\mu(x) \right\}^{1/q} \leq c \left\{ \int_{\{R_{1,k}^+ : |x_k| \leq \xi\}} d\mu(x_k) \left[\int_{R_{1,k}} \bar{A}^*(u_{\xi,k}^*, y_k) d\mu(y_k) \right]^q \right\}^{1/q}$$

Отсюда, с учетом неравенства, полученного для $\bar{A}^*(u_{\xi,k}^*; y_k)$, доказывается б) Леммы 1.

Аналогичными рассуждениями доказывается часть с) леммы 1 и лемма 2.

С помощью лемм 1 и 2 доказывается

Лемма 3. Если $u \in J_{p,k}^*(R_m^+)$ и $A \in K_\nu(p, q)$, то для почти всех $x \in R_m^+$ существует $v(x) = Au(x)$, и имеет место оценка

$$\Omega_{p,k}^*(v, \xi) \leq c \xi^{\frac{1+a_k}{q}} \int_{\xi}^{\infty} \Omega_{p,k}^*(u, t) t^{-\left(\frac{1+a_k}{q}+1\right)} dt, \quad t > 0, \quad (\Omega^*)$$

где c не зависит от u и ξ .

Ограниченность в пространствах с весом

Введем множества N_1^* , $\alpha_{p,k}^*$ и пространства $I_{p,k}(\alpha; R_m^+)$.

N_1^* - совокупность неотрицательных функций $\alpha(t)$ $t \in (0, \infty)$, таких, что $\alpha \in L[\xi, \infty) \quad \forall \xi > 0$ и $\alpha(t) > 0$ для почти всех $t \in [\varepsilon, \infty)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

$$\alpha_{p,k}^* = \left\{ \alpha \in N_1^* : \int_1^{\infty} \alpha^{\frac{1}{p}}(t) t^{-\left(\frac{a_k+1}{q}\right)^p} dt < \infty \right\}.$$

$$I_{p,k}^*(\alpha; R_m^+) = \left\{ u - \text{изм.} : \|u\| = \left\{ \int_0^{\infty} (\Omega_{p,k}^*(u, \xi))^p \alpha(\xi) d\xi \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad \alpha \in N_1^*.$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 4. Пусть $\alpha \in N_1^*$, $\omega(t) = \left(\int_t^{\infty} \alpha(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{p}}$.

Тогда

$$I_{p,k}^*(\alpha; R_m^+) = L_{p,\nu}(\omega(|x_k|); R_m^+)$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

Лемма 5. Пусть $\alpha \in \alpha_{p,k}^*$, тогда

$$I_{p,k}(\alpha; R_m^+) \subset J_{p,k}(R_m^+).$$

В дальнейшем неоднократно будем пользоваться следующим обобщением теоремы Харди :

Теорема X^* . Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Для того, чтобы существовала константа C , не зависящая от функции g и такая, что

$$\left(\int_0^\infty \left| \mu(t) \int_t^\infty g(\tau) d\tau \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^\infty |v(t)g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

необходимо и достаточно

$$B_2 \equiv \sup_{t>0} \left(\int_0^t |\mu(\tau)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^\infty |v(\tau)|^{-p'} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \quad (X^*)$$

Теорема 1. Пусть $A \in K_v(p, q)$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Если $\varphi, \psi \in N_1^*$ такие, что

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t [\psi^q(\xi) \xi^{\frac{a_k+1}{q}}]^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^\infty \left[\xi^{\left(\frac{a_k+1}{q}\right)} \varphi^p(\xi) \right]^{-p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad (I)$$

то оператор A действует из $I_{p,k}^*(\varphi, R_m^+)$ в $I_{q,k}^*(\psi, R_m^+)$ и ограничен.

Лемма 4 позволяет сформулировать теорему 1 в терминах весовых $L_{p,v}$ пространств с монотонно убывающими весами.

Теорема 1'. Пусть $A \in K_v(p, q)$, $\varphi, \psi \in N_1^*$ и выполняется условие (I).

Положим

$$\omega(t) = \left\{ \int_t^\infty \varphi(\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \omega_1(t) = \left\{ \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда оператор A действует из $L_{p,v}(\omega(|x_k|); R_m^+)$ в $L_{q,v}(\omega_1(|x_k|); R_m^+)$ и ограничен.

Вышеприведенные рассуждения приводят к следующей теореме (см.[3]):

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $A \in K_v(p, q)$ и $k \in \{1, \dots, m\}$ и пара (ω, ω_1) положительных убывающих функций ω, ω_1 удовлетворяет условию

$$C = \sup_{t>0} \left(\int_0^t (\omega_1(\xi) \xi^{\frac{a_k+1}{q}})^q \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^\infty (\omega(\xi) \xi^{\frac{a_k+1}{q}})^{-p} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (\omega')$$

Тогда для любой функции $u \in L_{p,v}(\omega(|x_m|), R_m^+)$ $Au(x)$ существует для почти всех $x \in R_m^+$ и имеет место неравенство

$$\left(\int_{R_m^+} |(Au)(x) \omega_1(|x_k|)|^q x_m^{2v} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_{R_m^+} |u(x) \omega(|x_k|)|^p x_m^{2v} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (O)$$

где c не зависит от $u \in L_{p,v}(\omega(|x_k|), R_m^+)$.

Доказательство. Возьмем $u \in L_{p,v}(\omega(|x_k|), R_m^+)$. Существование $Au(x)$ для почти всех $x \in R_m^+$ доказывается рассуждениями, проведенными в доказательстве леммы 3 из [3].

Оценим

$$\|Au : L_{q,v}(\omega(|x|), R_m^+)\|.$$

Пусть ω_1' - произвольная непрерывная убывающая функция на $(0, \infty)$, такая, что $\omega_1'(t) \leq \omega_1(t)$, $\omega_1'(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \omega(x)$ и $\exists \psi_1(\tau)$

$$\omega_1'^q(t) = \int_t^\infty \psi_1^q(\tau) d\tau + \omega_1'^q(\infty), \quad t \in (0, \infty) \quad (\psi)$$

(существование таких ω_1' очевидно).

Прежде всего, отметим, что из (ω') следует справедливость следующих двух соотношений :

$$\omega_1') \quad \exists c > 0, \forall t \in (0, \infty), \quad \omega_1(t) \leq c \omega(2t) ;$$

$$\omega_2') \quad \exists c_1 > 0, \forall t \in (0, \infty)$$

$$\left(\int_0^t \left(\psi_1(\xi) \xi^{\frac{a_k+1}{q}} \right)^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^\infty \left(\omega(\xi) \xi^{\frac{a_k+1}{q}} \right)^{-p} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1.$$

Используя (ψ) получаем

$$\|Au : L_{q,v}(\omega_1', R_m^+)\| \leq \left(\int_{R_m^+} |Au(x)|^q \left(\int_{|x_k|}^\infty \psi_1^q(\tau) d\tau \right) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} + \omega_1'(\infty) \left(\int_{R_m^+} |Au(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} = i_1 + i_2.$$

С учетом равенства

$$\int_{|x_k|}^{\infty} \psi_1^q(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \psi_1^q(\tau) X_{[|x_k|, \infty)}(\tau) d\tau,$$

получаем

$$i_1 = \left[\int_0^{\infty} \psi_1^q(\tau) \left(\int_{\{R_m^+ : |x_k| \leq \tau\}} |Au(x)|^q d\mu(x) \right) d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \leq i_1(1) + i_1(2),$$

$$i_1(j) = \left[\int_0^{\infty} \psi_1^q(\tau) \left(\int_{\{R_m^+ : |x_k| \leq \tau\}} |Au_{j,2\tau}(x)|^q d\mu(x) \right) d\tau \right]^{\frac{1}{q}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$u_{1,2\tau}(x) = X_{[0,2\tau]}(|x_k|)u(x), \quad u_{2,2\tau}(x) = X_{[2\tau, \infty]}(|x_k|)u(x).$$

Учитывая условия $A \in K_\nu(p, q)$ и (ω_1) , легко получаем

$$\begin{aligned} i_1(1) &\leq c_A \left[\int_0^{\infty} \psi_1^q(\tau) \left(\int_{R_m^+} X_{[0,2\tau]}(|x_k|) |u(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq c_A \left[\int_{R_m^+} \left(\int_{2|x_k|}^{\infty} \psi_1^q(\tau) d\tau \right)^{\frac{p}{q}} |u(x)|^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leq c_A \left[\int_{R_m^+} |u(x)|^p \omega^p(|x_k|) d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Оценим $i_1(2)$. Легко убедиться, что при $x \in \{R_m^+ : |x_k| \leq \tau\}$

$$|Au_{2,2\tau}(x)| \leq ci_{\beta,k}^*(u; 2\tau)(x).$$

Тогда, пользуясь леммой 1, легко получаем

$$\begin{aligned} i_1(2) &\leq c \left[\int_0^{\infty} \psi_1^q(\tau) (2\tau)^{\frac{a_k+1}{q}} \left(\int_{R_{1,k}} (|x_k| + 2\tau)^{\bar{\beta}} \dot{u}_{2\tau,k}^*(x_k) d\mu(x_k) \right)^q d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq c \left[\int_0^{\infty} \left(\psi_1(\tau) \tau^{\frac{a_k+1}{q}} \int_{\tau}^{\infty} t^{\bar{\beta}+a_k} A_{2\tau,k}^*(t) dt \right)^q d\tau \right]^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

где $\bar{\beta} = -(1+a_k) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)$, $A_{2\tau,k}^*(t) = \theta_k \dot{u}_{2\tau,k}^*(-t) + \dot{u}_{2\tau,k}^*(t)$, $\theta_k = 0$ если

$k = m$, $\theta_k = 1$ при $k \neq m$.

Положим

$$\mu(t) = \psi_1(\tau) \tau^{\frac{a_k+1}{q}}, \quad \nu(t) = t^{\frac{a_k+1}{q} + \frac{1}{p}} \omega(t), \quad g(\tau) = t^{(\bar{\beta}+a_k)} A_{2\tau,k}^*(t).$$

Тогда, в силу (ω_2) для пары (μ, ν) выполняется условие (X^*) и поэтому теорема X^* верна для μ, ν и g . С учетом этого, получаем

$$i_1(2) \leq c \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{a_k+1}{q} + \frac{1}{p}} \omega(t) t^{\bar{\beta}+a_k} A_{2\tau,k}^*(t) \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

И, наконец, простыми вычислениями, получаем

$$i_1(2) \leq c \left(\int_{R_m^+} |u(x)|^p \omega^p(|x_k|) d\mu(x_k) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Также, с учетом условия $A \in K_\nu(p, q)$ и $\omega_1(\infty) \leq \omega_1(\infty) \leq c\omega(\infty) \leq c\omega(|x_k|)$ получаем

$$i_2 \leq cc_A \omega(\infty) \left(\int_{R_m^+} |u(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq cc_A \left(\int_{R_m^+} |u(x)|^p \omega^p(|x_k|) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Этим теорема полностью доказана.

Двухвесовые L_p оценки

Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Обозначим через $\omega_{p,q,k}^\nu$ совокупность пар (ω, ω_1) положительных функций, удовлетворяющих условиям

$$L = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \left[\xi^{-\frac{a_k+1}{p}} \omega_1(\xi) \right]^q \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t \left[\xi^{-\frac{a_k+1}{p}} \omega(\xi) \right]^{-p'} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad (\omega)$$

$$L^* = \sup_{t>0} \left(\int_0^t \left[\xi^{\frac{a_k+1}{q}} \omega_1(\xi) \right]^q \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^\infty \left[\xi^{\frac{a_k+1}{q}} \omega(\xi) \right]^{-p'} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad (\omega^*).$$

Отметим, что если $\omega(t) = t^\alpha$, $\omega_1(t) = t^\beta$, $t > 0$, $\beta \in R$, то $(\omega, \omega_1) \in \omega_{p,q,k}^\nu$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta \in \left(-\frac{a_k+1}{q}, \frac{a_k+1}{p'} \right)$.

С помощью простых рассуждений, легко получаем

Замечание 1. Пусть ω, ω_1 - положительные функции. Тогда :

а) если ω, ω_1 монотонно возрастают и выполняется (ω) , то выполняется (ω^*) и

$$\forall n = 1, 2, \dots, \exists c_n > 0, \forall t \in (0, \infty). \omega_1(t) \leq c_n \omega(2^{-n}t);$$

б) если ω и ω_1 монотонно убывают и выполняются (ω^*) , то выполняется (ω) и

$$\forall n = 1, 2, \dots, \exists c'_n > 0, \forall t \in (0, \infty) \omega_1(t) \leq c'_n \omega(2^n t).$$

Из этого замечания в частности следует, что если ω и ω_1 монотонно возрастают (или же монотонно убывают) и удовлетворяют условию (ω) (соот. (ω^*)), то

$$\sup_{t < \tau \leq j\tau} \omega_1(\tau) \leq c \inf_{t < \tau \leq jt} \omega(\tau), \quad t > 0. \quad (\omega')$$

Замечание 2.

а) если ω, ω_1 возрастают, то из (ω) следуют (ω^*) и (ω') ;

б) если ω и ω_1 убывают, то из (ω^*) следуют (ω) и (ω') .

Эти рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема С. Пусть $1 < p \leq q < \infty, k \in \{1, 2, \dots, m\}, A \in K_v(p, q)$ и (ω, ω_1) пара положительных функций. Если

1) ω, ω_1 удовлетворяют условию (ω') ,

2) $(\omega, \omega_1) \in \omega_{p,q,k}^v$,

то для любой функции $u \in L_{p,v}(\omega(|x_k|), R_m^+)$ $Au(x)$ существует для почти всех $x \in R_m^+$ и имеет место неравенство (О).

Доказательство.

Пусть $u \in L_{p,v}(\omega)$. Существование $Au(x)$ для почти всех $x \in R_m^+$ доказывается по уже приведенной схеме. Положим

$$I_{k,n} = \{R_m^+ : 2^n < |x_k| \leq 2^{n+1}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Применив неравенство Минковского, получаем

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{R_m^+} |Au(x)\omega_1(|x_k|)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{n \in Z} \int_{I_{k,n}} |A(u(y)X_{(0,2^{n-1}](|y_k|)})(x)\omega_1(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} + \\
& + \left(\sum_{n \in Z} \int_{I_{k,n}} |A(u(y)X_{[2^{n-1},2^{n+2}](|y_k|)})(x)\omega_1(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\sum_{n \in Z} \int_{I_{k,n}} |A(u(y)X_{[2^{n+2},\infty)}(|y_k|)}(x)\omega_1(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} = \\
& = i_1 + i_2 + i_3.
\end{aligned}$$

Положим

$$u_{k,n}(y) = u(y)X_{[2^{n+2},\infty)}(y),$$

$$\dot{u}_{k,n}(y_k) = \left(\int_{R_{m-1,k}} u_{k,n}^p(\hat{y}_k, y_k) d\mu(\hat{y}_k) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Оценим сверху i_3 . Пользуясь рассуждениями, проведенными в доказательстве леммы 1, получаем

$$\begin{aligned}
i_3 & \leq \left(\sum_{n \in Z} \int_{R_{1,k} \cap I_{k,n}} \omega_1^q(|x_k|) \left[\int_{R_{1,k} \cap \{|y_k| \geq 2^{n+2}\}} \bar{A}^*(u_{k,n}; y_k) d\mu(y_k) \right]^q d\mu(x_k) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\
& \leq c \left(\sum_{n \in Z} \int_{R_{1,k} \cap I_{k,n}} \omega_1^q(|x_k|) \left[\int_{R_{1,k} \cap \{|y_k| \geq 2^{n+2}\}} |y_k|^{\frac{m-1+b_k}{r}-\beta} \dot{u}_{k,n}(y_k) d\mu(y_k) \right]^q d\mu(x_k) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\
& \leq c \left(\int_{R_m^+} (|u(x)\omega(|x_k|)|)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Аналогичными рассуждениями доказывается, что последняя оценка имеет место и для i_1 .

Оценим сверху i_2 .

Так как $I_{k,n} \subset \{R_m^+ : 2^{n-1} < |x_k| \leq 2^{n+1}\} = I'_{k,n}$, с учетом $A \in K_\nu(p, q)$ и условия (ω') , получаем

$$\begin{aligned}
i_2 &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sup_{x \in I_{k,n}} \omega_1(|x_k|) \right]^q \int_{I_{k,n}} |A(u(y)X_{I_{k,n}}(|y_k|))(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\
&\leq c_A c \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\inf_{x \in I_{k,n}} \omega_1(|x_k|) \right)^q \left(\int_{I_{k,n}} |u(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_A c \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{I_{k,n}} [|u(x)|\omega(|x_k|)]^p d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} \leq \\
&\leq c_A c \left(\int_{R_m^+} [|u(x)|\omega(|x_k|)]^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А. Некоторые оценки для особого интеграла с суммируемой плотностью. // ДАН СССР, 1969, т.188, №2, с.263-265.
2. Абдуллаев С.К. О некоторых классах интегральных операторов в пространствах суммируемых функций. // ДАН СССР, 1985, т.283, №4, стр. 777- 780.
3. Абдуллаев С.К., Карамалиев Н.Р. Весовые оценки сингулярных и слабо сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига. // Вестник Бакинского Университета, сер. физ-мат. наук, 2005, №1.
4. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. Весовые оценки сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига. // Математический сборник, 1992, т.183, №9, с.45-66.
5. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. О классах операторов типа потенциала, порожденных обобщенным сдвигом. // Док. расш. засед. сем. инт.-га приклад.матем. им.И.Н.Векуа, том 3, №2, 1988.
6. Bradley J.C. Hardy inequalities with mixed // Canad.Math.Bull.-1978, v.21, №2, стр.405-408.
7. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // Успехи матем. наук, 6, №2 (1951), стр.102-143.
8. Кипрянов И.А., Ключанцев М.И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига II // Сибирский матем. журнал, 1970, т. XI, №5, с.1061-1083.
9. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, Изд. "МИР", Москва, 1980, 664 стр.

**ÜMUMİLƏŞMİŞ SÜRÜŞMƏ OPERATORUN DOĞURDUĞU SİNGULAR
VƏ ZƏİF SİNGULAR İNTEQRALLAR ÜÇÜN ÇƏKİLİ
QIYMƏTLƏNDİRMƏLƏR.II.**

S.K.ABDULLAYEV, N.R.KƏRƏMƏLİYEV

ANNOTASIYA

İşdə Laplas – Bessel diferensial operatoru ilə bağlı ümumiləşmiş sürüşmənin (ÜS) doğurduğu bükmə tipli inteqral operatorların kafi qədər geniş sinifləri üçün çəkili L_p - qiymətləndirmələr qurulur. Belə ki, ÜS–nun doğurduğu Riss potensialları, singular inteqral operatorlar və Puasson inteqralları bu siniflərə aiddirlər. Çəki funksiyaları isə müəyyən mənada dəqiq olan şərtləri ödəyən birdəyişənli müsbət funksiyalardır.

**WEIGHTED ESTIMATION OF SINGULAR AND
WEAKLY SINGULAR INTEGRALS GENERATED
BY GENERALIZED SHIFT OPERATOR**

S.K.ABDULLAYEV, N.R.KARAMALIYEV

ABSTRACT

In this work weighted L_p - estimations for sufficiently wide class of packet type integral operators generated by generalized shift (GS) associated with differential Laplas – Bessel operator are established.

Considered class of operators contains particularly singular integral operators, Riss potentials, Puasson integrals, generated by (GS).